Радианное измерение углов. Значения основных тригонометрических функций для аргументов $0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi.$

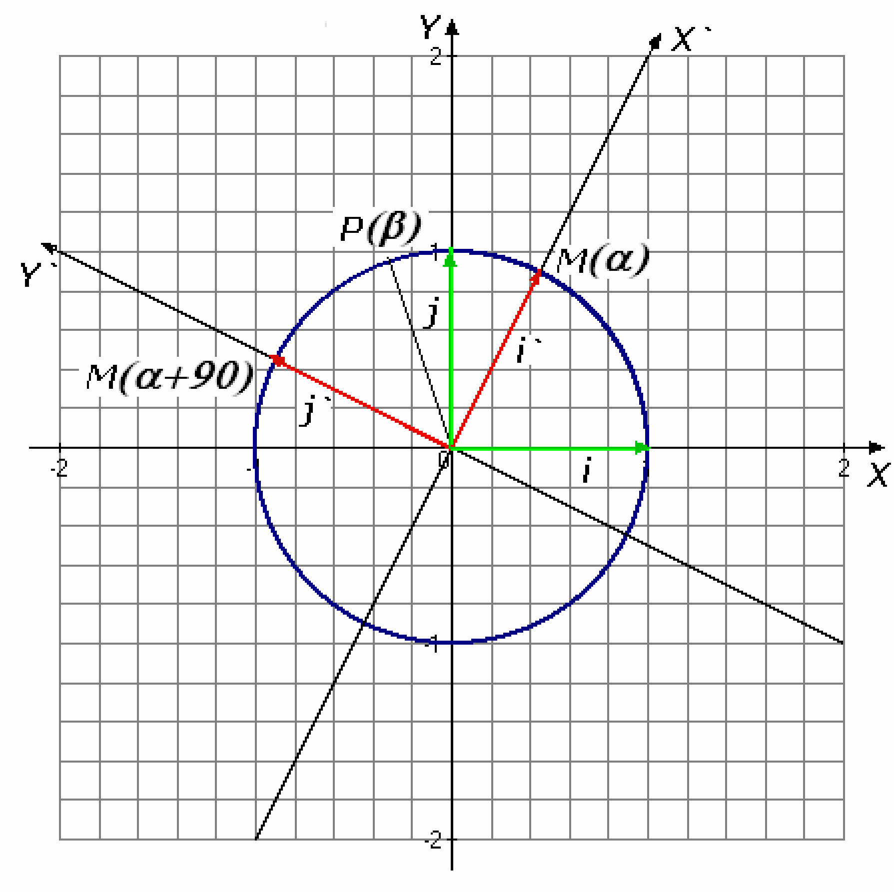
Угол в один радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности. Угол в один градус – это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой составляет $\frac{1}{360}$ часть от длины всей окружности. Если α - значение угла в градусах, β - в радианах, то $\alpha = \frac{\beta \cdot 180^\circ}{\pi}$ или $\beta = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$, где π - величина, постоянная для любой окружности и равна отношению длины окружности к её диаметру. Число π трансцендентно, т. е. оно не может являться корнем какого-либо алгебраического многочлена с целыми коэффициентами. Как и любое иррациональное число, π представимо в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.
Приближённое значение числа $\pi \approx 3{,}14$.

Значения основных тригонометрических функций некоторых аргументов.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Формулы сложения. Формулы приведения. Формулы двойного и половинного аргументов. Универсальная подстановка.

Синус, косинус суммы и разности аргументов.



$Oxy:\overrightarrow{OP}=\vec{i}\cos\beta+\vec{j}\sin\beta$. (1)

$Ox'y':\overrightarrow{OP}=\vec{i}'\cos(\beta-\alpha)+\vec{j}'\sin(\beta-\alpha)$;

$$\begin{cases}\vec{i}'=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha\\ \vec{j}'=\vec{i}\cos(\alpha+90^\circ)+\vec{j}\sin(\alpha+90^\circ)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{i}'=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha\\ \vec{j}'=-\vec{i}\sin(\alpha)+\vec{j}\cos(\alpha)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OP}=(\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha)\cos(\beta-\alpha)+(-\vec{i}\sin\alpha+\vec{j}\cos\alpha)\sin(\beta-\alpha)=$$

$$=\vec{i}(\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha)+\vec{j}(\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha+\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha)\quad(2)$$

Приравнивая в формулах (1) и (2) коэффициенты перед базисными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$, получаем систему:

$$\begin{cases}\cos\beta=\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha\\ \sin\beta=\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha+\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha\end{cases}$$

Положим $\beta-\alpha=x,\alpha=y$. Тогда $\beta=x+y$. Имеем:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\\ \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\end{aligned}}$$

Далее, положим $y=-y$. Имеем:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y\\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y\end{aligned}}$$

Замечание. Рассмотрим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OM}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ и $\overrightarrow{OP}(\cos\beta,\sin\beta)$. С одной стороны, по определению $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos(\overrightarrow{OM}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP})=\cos(\alpha-\beta)$, с другой – в координатах $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. Получили, что $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$. Положим $\beta=-\beta$. Имеем:

$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$.

Далее, т. к. $\sin(\alpha+\beta)=\cos((\alpha+\beta)-\frac{\pi}{2})=\cos(\alpha+(\beta-\frac{\pi}{2}))$, то

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(\beta-\frac{\pi}{2})-\sin\alpha\sin(\beta-\frac{\pi}{2})=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$, или $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$. Положим $\beta=-\beta$. Имеем:

$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$.

Тангенс, котангенс суммы и разности аргументов.

$$tg(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y},$$ или

$$tg(x+y)=\frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}.$$

Итак, получили, что $\boxed{tg(x+y)=\dfrac{tgx+tgy}{1-tgxtgy}}$.

Положим $y=-y$. Имеем: $\boxed{tg(x-y)=\dfrac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}}$.

$$ctg(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}$$, или

$$ctg(x+y)=\frac{\dfrac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\sin x\sin y}}{\dfrac{\sin x\cos y}{\sin x\sin y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\sin x\sin y}}=\frac{ctgxctgy-1}{ctgx+ctgy}$$

Итак, получили, что $\boxed{ctg(x+y)=\dfrac{ctgxctgy-1}{ctgx+ctgy}}$.

Положим $y=-y$. Имеем: $ctg(x-y)=\dfrac{-ctgxctgy-1}{ctgx-ctgy}=\dfrac{ctgxctgy+1}{ctgy-ctgx}$,

$$\boxed{ctg(x-y)=\frac{ctgxctgy+1}{ctgy-ctgx}}.$$

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям.

функция	аргумент t			
	$0<t<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<t<\pi$	$\pi<t<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$
$\sin t$	+	+	–	–
$\cos t$	+	–	–	+
tgt	+	–	+	–
$ctgt$	+	–	+	–

Формулы приведения.

функция	аргумент t					
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tgt	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
$ctgt$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$

Для преобразования выражений вида $\sin(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha)$, $\cos(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha)$, $tg(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha)$, $ctg(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha)$ удобно пользоваться таким *мнемоническим правилом:*

1) перед приведённой функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция, если считать, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$*;*

2) функция меняется на «кофункцию», если n нечётно; функция не меняется, если n чётно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс и тангенса).

Формулы двойного аргумента.

Из формул сложения для $\sin(x+y)$ и $\cos(x+y)$, полагая $x = y$, выводятся *формулы двойного аргумента:* $\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$,

$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$, $\boxed{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$, $\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$

$\boxed{tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}}$, $\boxed{ctg 2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}}$.

Формулы половинного аргумента.

Полагая в формулах $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $x = \frac{x}{2}$, получаем *формулы половинного аргумента:*

$\boxed{\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}}$, $\boxed{\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}}$, $\boxed{tg^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$, $\boxed{ctg^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$.

Универсальная подстановка $t = tg\frac{x}{2}$.

1. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$;

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow tg^2\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1 + tg^2\frac{x}{2}};$$

Итак, $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$, или $\boxed{\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}}$.

2. $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 1 - 2tg^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} =$

$= 1 - \frac{2tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$. Итак, $\boxed{\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}$.

3. $tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1 + tg^2\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$. Итак, $\boxed{tgx = \frac{2t}{1 - t^2}}$.

4. $ctgx = \frac{1}{tgx} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}$. Итак, $\boxed{ctgx = \frac{1 - t^2}{2t}}$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Вспомогательный аргумент.

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad (1)$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \qquad (2)$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \qquad (3)$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \qquad (4)$$

1. Сложим формулы (1) и (2). Получим:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y\,, \qquad (5)$$

или $\boxed{\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))}$.

Положим $\begin{cases}x+y=\alpha\\ x-y=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\alpha+\beta\\ 2y=\alpha-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$. В силу равенства (5) имеем: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

или $\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$.

2. Вычтем из формулы (1) формулу (2). Получим:

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y\,. \qquad (6)$$

Положим $\begin{cases}x+y=\alpha\\ x-y=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$. В силу равенства (6) имеем:

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, или $\boxed{\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$.

3. Сложим формулы (3) и (4). Получим:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y\,, \qquad (7)$$

или $\boxed{\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))}$.

Положим $\begin{cases}x+y=\alpha\\ x-y=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$. В силу равенства (7) имеем:

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, или $\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$.

4. Вычтем из формулы (3) формулу (4). Получим:

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y\,, \qquad (8)$$

или $\boxed{\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))}$.

Положим $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$. В силу равенства (8) имеем:

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, или $\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$.

5. Разделим формулу (1) на произведение $\cos x\cos y$. Получим:

$$\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}\Rightarrow \boxed{tgx+tgy=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}.$$

Положим $y=-y$. Имеем: $\boxed{tgx-tgy=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}$.

6. Разделим формулу (1) на произведение $\sin x\sin y$. Получим:

$$\frac{\cos x\sin y}{\sin x\sin y}+\frac{\sin x\cos y}{\sin x\sin y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}\Rightarrow \boxed{ctgx+ctgy=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}}.$$

Положим $y=-y$. Имеем: $\boxed{ctgx-ctgy=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}}$.

Вспомогательный аргумент.

Рассмотрим выражение вида:

$a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$, a≠0, b≠0.

Положим $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, тогда $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. Имеем:

$$a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi\pm\cos x\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi).$$

Итак, $\boxed{a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi),\text{ где}\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}}$.