Некоторые соотношения для тригонометрических функций

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}$$

Доказательство

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}s_n=\sum_{k=1}^{n}2\sin kx\sin\frac{x}{2};$$

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}s_n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k-1)x}{2}-\cos\frac{(2k+1)x}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)x}{2}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k+1)x}{2}=\left(\cos\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{n}\cos\frac{(2k-1)x}{2}\right)-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{(2k+1)x}{2}+\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right)=\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right)+$$

$$+\left(\sum_{t+1=2}^{t+1=n}\cos\frac{(2(t+1)-1)x}{2}-\sum_{t=1}^{n-1}\cos\frac{(2t+1)x}{2}\right)=\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right)+$$

$$+\left(\sum_{t=1}^{n-1}\cos\frac{(2t+1)x}{2}-\sum_{t=1}^{n-1}\cos\frac{(2t+1)x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2};$$

$$2\sin\frac{x}{2}s_n=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}\Rightarrow s_n=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow s_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{-2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\left(\frac{-nx}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\cos kx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}}$$

Доказательство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}};$$

продифференцируем обе части равенства по x. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos kx = \frac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{2n+1}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right)2\sin\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{-\sin^2\frac{x}{2} + (2n+1)\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} -$$

$$-\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{-1+2n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}+$$

$$+\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}+\cos\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{-1+n\left(\cos nx-\cos(n+1)x\right)+\cos nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}}$$

Доказательство

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kx \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}s_n=\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx;$$

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}s_n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(1-2k)x}{2}+\sin\frac{(1+2k)x}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{-(2k-1)x}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k+1)x}{2}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k+1)x}{2}-\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)x}{2}=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{(2k+1)x}{2}+\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right)-\left(\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{(2k-1)x}{2}\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sum_{t=1}^{n-1}\sin\frac{(2t+1)x}{2}-\sum_{t+1=2}^{t+1=n}\sin\frac{(2(t+1)-1)x}{2}\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sum_{t=1}^{n-1}\sin\frac{(2t+1)x}{2}-\sum_{t=1}^{n-1}\sin\frac{(2t+1)x}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2};\;\; 2\sin\frac{x}{2}s_n=\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k\sin kx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}}$$

Доказательство

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2};$$

продифференцируем обе части равенства по x. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}(-k)\sin kx=\frac{(2n+1)\cos\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{(2n+1)x}{2}\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2n\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}+\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{4\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{n\left(-\sin nx+\sin(n+1)x\right)-\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{-(n+1)\sin nx+n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}};$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\sin kx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}}$$

Доказательство

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^k}}{2\sin\frac{x}{2^k}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{2x}{2^k}}{2\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^k}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{\sin x\prod\limits_{k=2}^{n}\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin x\prod\limits_{t+1=2}^{t+1=n}\sin\frac{x}{2^{(t+1)-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}\prod\limits_{t=1}^{n-1}\sin\frac{x}{2^t}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{\sin x\prod\limits_{t=1}^{n-1}\sin\frac{x}{2^t}}{\sin\frac{x}{2^n}\prod\limits_{t=1}^{n-1}\sin\frac{x}{2^t}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}tg\,\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n}ctg\,\frac{x}{2^n}-ctg\;x}$$

Доказательство

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}};$$

Прологарифмируем обе части равенства по основанию e. Имеем:

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\ln\sin x-\left(n\ln 2+\ln\sin\frac{x}{2^n}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}=\ln\sin x-\ln\sin\frac{x}{2^n}-n\ln 2;$$

Продифференцируем обе части равенства по x. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{-\sin\frac{x}{2^k}}{2^k\cos\frac{x}{2^k}}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\Leftrightarrow-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}tg\,\frac{x}{2^k}=ctg\;x-\frac{1}{2^n}ctg\,\frac{x}{2^n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}tg\,\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n}ctg\,\frac{x}{2^n}-ctg\;x.$$

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n}\cos\left(2^k x\right)=\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin x}}$$

Доказательство

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\left(2^k x\right)=\prod_{k=0}^{n}\frac{2\sin\left(2^k x\right)\cos\left(2^k x\right)}{2\sin\left(2^k x\right)}=\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(2\cdot 2^k x\right)}{2\sin\left(2^k x\right)}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}\sin\left(2^{k+1}x\right)}{\prod\limits_{k=0}^{n}\sin\left(2^k x\right)}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)\prod\limits_{k=0}^{n-1}\sin\left(2^{k+1}x\right)}{\sin x\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\left(2^k x\right)}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)\prod\limits_{t-1=0}^{t-1=n-1}\sin\left(2^{(t-1)+1}x\right)}{\sin x\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\left(2^t x\right)}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\left(2^t x\right)}{\sin x\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\left(2^t x\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin x}.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}2^k tg\left(2^k x\right)=ctg\ x-2^{n+1}ctg\left(2^{n+1}x\right)}$$

Доказательство

$$\prod_{k=0}^{n}\cos\left(2^k x\right)=\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin x};$$

Прологарифмируем обе части равенства по основанию e. Имеем:

$$\ln\prod_{k=0}^{n}\cos\left(2^k x\right)=\ln\sin\left(2^{n+1}x\right)-\left(\left(n+1\right)\ln 2+\ln\sin x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \ln\cos\left(2^k x\right) = \ln\sin\left(2^{n+1} x\right) - \ln\sin x - \left(n+1\right)\ln 2;$$

Продифференцируем обе части равенства по x. Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{-2^k \sin\left(2^k x\right)}{\cos\left(2^k x\right)} = \frac{2^{n+1}\cos\left(2^{n+1} x\right)}{\sin\left(2^{n+1} x\right)} - \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{k=0}^{n} 2^k tg\left(2^k x\right) = 2^{n+1} ctg\left(2^{n+1} x\right) - ctg\ x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} 2^k tg\left(2^k x\right) = ctg\ x - 2^{n+1} ctg\left(2^{n+1} x\right).$$