Средние величины

Пусть задана выборка $(x_i), i=\overline{1,n}$. Статистический вес m_k элемента x_k показывает частоту его повторения в выборке. Производные средней степенной бывают простыми ($m_k = 1, \forall k = \overline{1,n}$) и взвешенными.

название средней	простая	взвешенная
степенная	$\overline{x} = \sqrt[z]{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^z}{n}}$	$\overline{x} = \sqrt[z]{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^z m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$
гармоническая z=-1	$\overline{x} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{x_i}}$
геометрическая z→0	$\overline{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$	$\overline{x} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} m_i]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}}$
арифметическая z=1	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$
квадратическая z=2	$\overline{x} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$	$\overline{x} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$
кубическая z=3	$\overline{x} = \sqrt[3]{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n}}$	$\overline{x} = \sqrt[3]{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3 m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$

Справедливо следующее неравенство:

$$\overline{x}_{гарм} \le \overline{x}_{геом} \le \overline{x}_{арифм} \le \overline{x}_{квадр} \le \overline{x}_{куб}$$

Средняя геометрическая как производная средней степенной порядка z

$$\overline{x} = \lim_{z\to 0} \sqrt[z]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^z m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^z m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right)^{\frac{1}{z}} = \left|1^{\infty}\right| = \lim_{z\to 0} e^{\ln\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^z m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right)^{\frac{1}{z}}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^z m_i\right) - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)}{z}} = \left|e^{\frac{0}{0}}\right|;$$

Применим правило Лопиталя:

$$\overline{x} = e^{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^z m_i \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^z m_i}} = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i^{m_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} = e^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}\right)} =$$

$$= e^{\ln\left(\sqrt[\sum_{i=1}^{n} m_i]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}}\right)} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} m_i]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}};$$

$$\text{для}\quad m_k = 1 \quad \forall k = \overline{1,n} \quad \overline{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$