Некоторые соотношения для обратных тригонометрических функций

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \forall x \in [-1;1]$

2. $\mathrm{arc}\,tg(-x) = -\mathrm{arc}\,tg\ x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad \forall x \in [-1;1]$

4. $\mathrm{arc}\,ctg(-x) = \pi - \mathrm{arc}\,ctg\ x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1;1]$

6. $\mathrm{arc}\,tg\ x + \mathrm{arc}\,ctg\ x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Доказательство

1. $-1 \le x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin(-x) \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le -\arcsin x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

На отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ***функция*** $y = \sin x$ ***строго возрастает.***

Возьмем синусы обеих частей равенства 1. Имеем:

$$\sin(\arcsin(-x)) = \sin(-\arcsin x) \Leftrightarrow -x = -\sin(\arcsin x) \Leftrightarrow -x = -x.$$

2. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \mathrm{arc}\,tg(-x) \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le -\mathrm{arc}\,tg\ x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

На отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ***функция*** $y = tg\ x$ ***строго возрастает.***

Возьмем тангенсы обеих частей равенства 2. Имеем:

$$tg\left(\operatorname{arc}tg\left(-x\right)\right)=tg\left(-\operatorname{arc}tg\ x\right)\Leftrightarrow -x=-tg\left(\operatorname{arc}tg\ x\right)\Leftrightarrow -x=-x.$$

$$3.\ \ -1\le x\le 1\Rightarrow\begin{cases}0\le \arccos\left(-x\right)\le\pi,\\0\le\pi-\arccos x\le\pi.\end{cases}$$

На отрезке $\left[0;\pi\right]$ ***функция*** $y=\cos x$ ***строго убывает.***

Возьмем косинусы обеих частей равенства 3. Имеем:

$$\cos\left(\arccos\left(-x\right)\right)=\cos\left(\pi-\arccos x\right)\Leftrightarrow -x=-\cos\left(\arccos x\right)\Leftrightarrow -x=-x.$$

$$4.\ \ x\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}0\le \operatorname{arc}ctg\left(-x\right)\le\pi,\\0\le\pi-\operatorname{arc}tg\ \ x\le\pi.\end{cases}$$

На отрезке $\left[0;\pi\right]$ ***функция*** $y=ctg\ \ x$ ***строго убывает.***

Возьмем котангенсы обеих частей равенства 4. Имеем:

$$ctg\left(\operatorname{arc}ctg\left(-x\right)\right)=ctg\left(\pi-\operatorname{arc}ctg\ \ x\right)\Leftrightarrow -x=-ctg\left(\operatorname{arc}ctg\ \ x\right)\Leftrightarrow -x=-x.$$

5. ***Перепишем равенство 5. в виде*** $\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x.$

$$-1\le x\le 1\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\dfrac{\pi}{2},\\-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{2}-\arccos x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

На отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ ***функция*** $y=\sin x$ ***строго возрастает.***

Возьмем синусы обеих частей. Имеем:

$$\sin\left(\arcsin x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\Leftrightarrow x=\cos\left(\arccos x\right)\Leftrightarrow x=x.$$

6. ***Перепишем равенство 6. в виде*** $\operatorname{arc}tg\ x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}ctg\ x.$

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arc}tg\ x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}ctg\ x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ***функция*** $y = tg\ x$ ***строго возрастает.***

Возьмем тангенсы обеих частей. Имеем:

$$tg\left(\operatorname{arc}tg\ x\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}ctg\ x\right) \Leftrightarrow x = ctg\left(\operatorname{arc}ctg\ x\right) \Leftrightarrow x = x.$$