Формула бинома Ньютона

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k,\ \ C_n^k=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!}.$$

$$n!\overset{def}{=}1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\left(n-1\right)\cdot n;\ \ 0!\overset{def}{=}1.$$

Лемма. $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k.$

Доказательство.

$$C_n^k+C_n^{k-1}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!}+\frac{n!}{\left(n-k+1\right)!\left(k-1\right)!}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!}+$$

$$+\frac{n!}{\left(n-k\right)!\left(n-k+1\right)\frac{k!}{k}}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!}+\frac{n!k}{\left(n-k\right)!k!\left(n-k+1\right)}=$$

$$=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!}\left(1+\frac{k}{n-k+1}\right)=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!}\frac{n+1}{n-k+1}=$$

$$=\frac{n!\left(n+1\right)}{\left(n-k\right)!\left(n-k+1\right)k!}=\frac{\left(n+1\right)!}{\left(\left(n+1\right)-k\right)!k!}=C_{n+1}^k.$$

Теорема. $\left(a+b\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k.$

Доказательство (метод математической индукции).

1. База индукции.

Приверим справедливость утверждения при $n=1$:

$$\left(a+b\right)^1=a+b.$$

2. Предположение индукции.

Предположим, что утверждение справедливо при некотором

$n=m,$ ***т. е.*** $\left(a+b\right)^m=\sum\limits_{k=0}^{m}C_m^k a^{m-k}b^k.$

3. Шаг индукции.

Исходя из предположения индукции, докажем справедливость утверждения при $n = m + 1$:

$$\left(a+b\right)^{m+1} = \left(a+b\right)^m \left(a+b\right) = a\left(a+b\right)^m + b\left(a+b\right)^m = a\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k +$$

$$+b\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} + C_m^m a^0 b^{m+1} =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} b^0 + \sum_{t=1}^{m} C_m^t a^{m+1-t} b^t + \sum_{t-1=0}^{t-1=m-1} C_m^{t-1} a^{m-(t-1)} b^{(t-1)+1} + C_m^m a^0 b^{m+1} =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} b^0 + \sum_{t=1}^{m} C_m^t a^{m+1-t} b^t + \sum_{t=1}^{m} C_m^{t-1} a^{m+1-t} b^t + C_m^m a^0 b^{m+1} =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} b^0 + \sum_{t=1}^{m} \left(C_m^t + C_m^{t-1}\right) a^{m+1-t} b^t + C_m^m a^0 b^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^0 a^{m+1} b^0 + \sum_{t=1}^{m} C_{m+1}^t a^{(m+1)-t} b^t + C_{m+1}^{m+1} a^0 b^{m+1} =$$

$$= \sum_{t=0}^{m+1} C_{m+1}^t a^{(m+1)-t} b^t = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{(m+1)-k} b^k.$$

Т. к. утверждение истинно при $n = 1$ ***и из предположения его истинности при некотором*** $n = m$ ***следует, что оно истинно при*** $n = m + 1$***, то утверждение остается истинным при любом натуральном*** n***.***