Числа Фибоначчи

Задача о кроликах.

Пусть имеется пара кроликов. Известно, что от каждой пары кроликов каждый месяц рождается новая пара кроликов, которая в свою очередь становится способной производить потомство в возрасте одного месяца. Требуется определить, сколько пар кроликов будет через n месяцев.

Вначале изложим историю этой задачи, затем её решение и другие задачи связанные с ней.

Говоря об античной математике, каждый назовет таких математиков, как Евклид, Пифагор, Герон и др. Одним из самых знаменитых математиков средних веков, наравне с Виетом был Леонардо из Пизы, известный под именем Фибоначчи (сокращенное filius Bonacci, т.е. сын Боначчи).

Фибоначчи родился в Италии в 1175г., был воспитан на Севере Африки, где его отец занимал пост дипломата. Вернувшись в Италию, в 1202г. публикует математический трактат под названием "Liber abacci". Этот трактат, содержавший почти все арифметические и алгебраические сведения того времени, сыграл главную роль в течении последующих столетий в развитии математики в Европе. В частности, на основе этого трактата, европейцы познакомились с арабскими цифрами, т.е. с позиционной системой исчисления. Также Фибоначчи публикует: в 1220г. "Practica geometrica", в 1225, "Liber quadratorum". Трактат "Liber abacci" был переиздан в 1228г. Одна из задач упоминаемая в "Liber abacci" называется "задача о кроликах" (с.123-124 издания 1228г.), представленная в начале этого материала.

Перейдем к решению этой задачи.

Пусть f_n число пар кроликов после n месяцев. Число пар кроликов после $n+1$ месяцев f_{n+1}, будет равно числу пар на n-ом месяце, т.е. f_n, плюс число пар новорожденных кроликов. Поскольку кролики рождаются от пары кроликов возраста больше одного месяца, новорожденных кроликов будет f_{n-1} пар. Следовательно, справедливо соотношение

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \tag{1}$$

причем

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1. \tag{2}$$

Таким образом получим рекуррентную числовую последовательность

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots \tag{3}$$

которая была названа рядом Фибоначчи. Каждый член этой последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Первые два члена считаются заданными $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Таким образом, "задача о кроликах" свелась к решению функционального уравнения (1), т.е. к нахождению общего члена последовательности f_n, удовлетворяющего соотношению (1) при условиях (2).

Предположим, что последовательность f_n имеет вид

$$f_n = \lambda^n, \tag{4}$$

где λ - вещественный параметр.

Подставив f_n в (1) получим

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1},$$

или, эквивалентно,

$$\lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0.$$

Так как $f_n \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbf{N}^*)$, последнее равенство принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \tag{5}$$

которое представляет собой квадратное уравнение по отношению к действительному параметру λ. Из (5) получим

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, последовательности

$$f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad f_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

удовлетворяют равенству (1). Отсюда заключаем, что уравнение (1) имеет много решений. В общем, существует бесконечное число последовательностей, удовлетворяющих (1). Легко заметить, что последовательность вида

$$f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{6}$$

где c_1, c_2 - фиксированные действительные константы, также удовлетворяет (1). Более того, можно показать, что любая последовательность, удовлетворяющая равенству (1) имеет вид (6). Имея другие цели, не будем доказывать этот факт в рамках этой работы. Для интересующихся общей теорией решения уравнений вида (1), называемых уравнениями в конечных разностях, рекомендуем обратиться к литературе [1]-[4].

Возвращаясь к последовательности Фибоначчи, отметим, что эта последовательность однозначно определена, и однозначность обеспечивается первыми двумя членами, т.е. начальными условиями (2). Подставляя $n = 0$ и $n = 1$ в (6) получим линейную систему

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \end{cases}$$

с решением $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

В результате получим, что n-ый член последовательности Фибоначчи имеет вид

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{7}$$

Свойства последовательности Фибоначчи.

1°.

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1. \tag{8}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &f_1 = f_3 - f_2 \\ &f_2 = f_4 - f_3 \\ &\ldots \\ &f_{n-1} = f_{n+1} - f_n \\ &f_n = f_{n+2} - f_{n+1}. \end{aligned}$$

Сложив все эти равенства почленно, получим

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - f_2,$$

и так как $f_2 = 1$, получим (8).

2°. $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$.

3°. $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$.

Свойства 2° − 3° доказываются аналогично 1°.

4°.

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}. \tag{9}$$

Доказательство. Легко заметить, что имеет место соотношение

$$f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} f_n = f_n(f_{n+1} - f_{n-1}) = f_n^2 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Из этого соотношения получаем равенства

$$\begin{aligned}
&f_1^2 = f_1 \cdot f_2,\\
&f_2^2 = f_2 \cdot f_3 - f_1 \cdot f_2,\\
&f_3^2 = f_3 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3,\\
&\ldots\\
&f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} - f_{n-1} \cdot f_n.
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно получаем (9).

5°. Показать, что

$$f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n \cdot f_{m+1}, \tag{10}$$

где f_n обозначает n-ый член последовательности Фибоначчи.

Доказательство. Зная общий вид члена f_n (см. (7)) можно подставив его в (10) показать, что имеет место равенство. Докажем (10) используя метод математической индукции. Проведем индукцию по $m \in \mathbf{N}$.

Для $m = 1$, равенство (10) примет вид

$$f_{n+1} = f_{n-1} \cdot f_1 + f_n \cdot f_2,$$

что очевидно. При $m = 2$ формула (10) также очевидна. Действительно,

$$f_{n+2} = f_{n-1} f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2f_n = f_{n-1} + f_n + f_n = f_{n+1} + f_n.$$

Таким образом, пусть основание индукции проверено ($m = 1$; $m = 2$). Пусть (10) верно для $m = k$ и $m = k + 1$. Докажем, что тогда (10) верно и для $m = k + 2$.

Таким образом, пусть верны равенства

$$f_{n+k} = f_{n-1}f_k + f_n f_{k+1},$$
$$f_{n+k+1} = f_{n-1}f_{k+1} + f_n f_{k+2}.$$

Суммируя почленно последниие равенства, получим равенство

$$f_{n+k+2} = f_{n-1} \cdot f_{k+2} + f_n \cdot f_{k+3},$$

которое представляет (10) при $m = k + 2$.

6°. $f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n \cdot f_{n+1}$.

Доказательство следует из (10) при $m = n$.

7°. Член f_{2n} делится на f_n.

Доказательство. Из 6° следует

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}),$$

откуда следует, что $f_{2n} \vdots f_n$.

8°. $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$.

9°. $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$.

Свойства $8^\circ - 9^\circ$, являющиеся прямыми следствиями 6°, предлагается доказать самостоятельно.

10°.

$$f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1} \tag{11}$$

Доказательство. Будем доказывать равенство (11) индукцией по n. При $n = 2$ равенство (11) преобразуется в справедливое равенство

$$f_2^2 = f_1 \cdot f_3 - 1.$$

Предположим, что равенство (11) справедливо для n и докажем, что тогда оно справедливо и для $n + 1$. Таким образом, пусть справедливо равенство

$$f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

Прибавим к обеим частям последнего равенства $f_n \cdot f_{n+1}$. В результате получим

$$f_n^2 + f_n \cdot f_{n+1} = f_{n-1} \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

или

$$f_n(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1}(f_{n-1} + f_n) + (-1)^{n+1},$$

и так как $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ (см. определение последовательности Фибоначчи), заключаем что

$$f_n f_{n+2} = f_{n+1}^2 + (-1)^{n+1},$$

или

$$f_{n+1}^2 = f_n \cdot f_{n+2} + (-1)^{n+2}.$$

Следовательно (11) справедливо и для $n+1$.

11°. Показать, что если n делится на m, то f_n делится на f_m.

Доказательство. Пусть $n \vdots m$, т.е. $n = mk$. Докажем свойство 11° индукцией по k. При $k = 1$, $n = m$, следовательно f_n делится на f_m. Предположим, что f_{mk} делится на f_m. Рассмотрим $f_{m(k+1)}$. Из равенства $f_{m(k+1)} = f_{mk+m}$ на основании соотношения (10) получим

$$f_{m(k+1)} = f_{mk-1} f_m + f_{mk} \cdot f_{m+1}.$$

Первый член суммы из правой части равенства, очевидно, делится на f_m. Второй член делится на f_m согласно индукционному предположению. Следовательно сумма этих членов делится на f_m, и значит, $f_{m(k+1)} \vdots f_m$. Свойство 11° доказано.

Для ознакомления с другими свойствами чисел Фибоначчи, связанными с делимостью, геометрией, теорией алгоритмов и т.д., читатель может обратиться к библиографии, указанной в конце этой работы.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ последовательность Фибоначчи. Доказать, что

   (a) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \ldots + f_{2n-1} \cdot f_{2n} = f_{2n}^2$

   (b) $f_1 f_2 + f_2 f_3 + \ldots + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$

(c) $nf_1 + (n-1)f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n = f_{n+4} - (n+3)$

(d) $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \ldots + nf_n = nf_{n+2} - f_{n+3} + 2$

2. Доказать, что для любого $m \in \mathbf{N}$, среди первых $m^2 - 1$ чисел Фибоначчи существует число, делящееся на m.

3. Доказать, что:

(a) Число Фибоначчи f_n четно тогда и только тогда, когда n делится на 3;

(b) Число Фибоначчи f_n делится на 3 тогда и только тогда, когда n делится на 4;

(c) $f_n \vdots 4$ тогда и только тогда, когда $n \vdots 6$;

(d) $f_n \vdots 5$ тогда и только тогда, когда $n \vdots 5$;

(e) $f_n \vdots 7$ тогда и только тогда, когда $n \vdots 8$;

(f) $f_n \vdots 16$ тогда и только тогда, когда $n \vdots 12$.

Литература

1. A.I.Hincin, Fractii continue, Ed. Tehnica, Bucuresti 1960.

2. I.Munteanu, D.Popa, Metoda sirurilor recurente, Editura GIL, ZALAU.

3. Н.М.Воробьёв, Числа Фибоначчи, Москва, Наука, 1992.

4. А.И.Маркушевич, Возвратные последовательности, Москва, Наука, 1975.